Kurs Maturalny Pryzmat Wiedzy
Lekcja 6 - Funkcja kwadratowa

Zagadnienia: Równania i nierówności kwadratowe; Postać ogólna, kanoniczna, iloczynowa funkcji kwadratowej; Wzory Viete'a; Równania kwadratowe z parametrem

Zadania wstępne

Zadanie 1. Rozwiąż poniższe równania, sprowadzając je do równań kwadratowych przez odpowiednie podstawienie:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

b) $x^{2/3} - 5x^{1/3} + 6 = 0$

c) $\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x} - 8 = 0$

d) $x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} = 10$

e) $x^6 + 5x^3 + 4 = 0$

Zadanie 2. Nie szkicując wykresu funkcji kwadratowej, oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji f w podanym przedziale, jeśli:

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2$, $x \in \langle 0, 3\rangle$

b) $f(x) = -\frac{3}{4}(x-1)^2 + 5$, $x \in \langle \frac{1}{2}, 2\rangle$

c) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x + 5$, $x \in \langle -2, -1\rangle$●

● **Zadanie 3.** Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania kwadratowego. Sprowadź wyrażenie do postaci, w której można zastosować wzory Viète'a, a następnie zapisz je za pomocą współczynników tego równania.

a) $x_1^2 + x_2^2$

b) $x_1^3 + x_2^3$

c) $x_1^4 + x_2^4$

d) $(x_1 - x_2)^2$

e) $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$

f) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

g) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

Zadanie 4. Dla jakich wartości parametru m równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste?

a) $x^2 - (m+3)x + m = 0$ ●

b) $mx^2 + 2x + 1 = 0$ ●

c) $x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 1 = 0$

Zadanie 5. Dla jakich wartości parametru m równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste:

1) tego samego znaku,

2) oba dodatnie,

3) oba ujemne,

4) różnych znaków?

Rozważ każde z poniższych równań oddzielnie.

a) $x^2 - (m+2)x + m = 0$

b) $x^2 + (m-4)x + m + 3 = 0$ ●

c) $mx^2 + 2x + 1 = 0$ ●

● **Zadanie 6.** Funkcja kwadratowa $f(x) = -2x^2 + bx + c$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty,\ 1)$ i malejąca w przedziale $(1,\ +\infty)$. Wiedząc, że $f(-3) = -25$, oblicz współczynniki b i c.

● **Zadanie 7.** Punkt $A(-6,\ 8)$ należy do wykresu tej funkcji kwadratowej f. Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej, wiedząc, że

$$f(x) > 0 \iff x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

● **Zadanie 8.** Napisz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej, wiedząc, że do wykresu tej funkcji należy punkt $P(-1,\ 1)$, zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty,\ 4)$, a maksymalny przedział, w którym funkcja f jest malejąca, to $(-2,\ +\infty)$.

● **Zadanie 9.** Największa wartość funkcji kwadratowej f w przedziale $(-3,\ 0)$ jest równa 4, a najmniejsza wartość w tym przedziale jest równa 1. Wyznacz wzór tej funkcji w postaci ogólnej, wiedząc, że maksymalny przedział, w którym funkcja f jest rosnąca, to $(-\infty,\ -2)$.

Zadania maturalne

Typ 1

●**Zadanie 1.** [matura, maj 2010, zadanie 6. (5 pkt)]
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 + mx + 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste takie, że suma ich kwadratów jest większa od $2m^2 - 13$.

Zadanie 2. [matura, maj 2011, zadanie 3. (6 pkt)]
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że

$$(x_1 - x_2)^2 < 8(m + 1).$$

Zadanie 3. [matura, czerwiec 2011, zadanie 2. (5 pkt)]
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$2x^2 - (m - 2)x - 3m = 0$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, spełniające warunek

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \leq 25.$$

Zadanie 4. [matura, maj 2012, zadanie 4. (6 pkt)]
Oblicz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$x^2 - (m+2)x + m + 4 = 0$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że

$$x_1^4 + x_2^4 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12.$$

Zadanie 5. [matura, maj 2013, zadanie 6. (6 pkt)]
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$x^2 + 2(1-m)x + m^2 - m = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2, spełniające warunek

$$x_1 x_2 \leq 6m \leq x_1^2 + x_2^2.$$

Zadanie 6. [matura, maj 2015, zadanie 13. (5 pkt)]
Dany jest trójmian kwadratowy $f(x) = (m+1)x^2 + 2(m-2)x - m + 4$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których trójmian f ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, spełniające warunek

$$x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$$

Zadanie 7. [matura, maj 2015, zadanie 3. (6 pkt)]
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$(m^2 - m)x^2 - x + 1 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 takie, że

$$\frac{1}{x_1 + x_2} \leq \frac{m}{3} \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$$

Zadanie 8. [matura, maj 2018, zadanie 12. (6 pkt)]
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$x^2 + (m+1)x - m^2 + 1 = 0$$

ma dwa rozwiązania rzeczywiste $x_1 \neq x_2$, spełniające warunek

$$x_1^3 + x_2^3 > -7x_1x_2.$$

Zadanie 9. [matura, maj 2019, zadanie 9. (6 pkt)]
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja kwadratowa określona wzorem

$$f(x) = (2m+1)x^2 + (m+2)x + m - 3$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, spełniające warunek

$$(x_1 - x_2)^2 + 5x_1x_2 \geq 1.$$

●**Zadanie 10.** [matura, maj 2021, zadanie 11. (5 pkt)]
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których trójmian kwadratowy

$$4x^2 - 2(m+1)x + m$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1 oraz x_2, spełniające warunki:

$$x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad x_1 + x_2 \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$$

Inne

●**Zadanie 11.** [matura, maj 2008, zadanie 3. (5 pkt)]
Liczby $x_1 = 5 + \sqrt{23}$ i $x_2 = 5 - \sqrt{23}$ są rozwiązaniami równania $x^2 - (p^2+q^2)x + (p+q) = 0$ z niewiadomą x. Oblicz wartości p i q.

●**Zadanie 12.** [matura, maj 2012, zadanie 1. (4 pkt)]
Wyznacz cztery kolejne liczby całkowite takie, że największa z nich jest równa sumie kwadratów trzech pozostałych liczb.

●**Zadanie 13.** [matura, maj 2015, zadanie 7. (2 pkt)]
Liczby -1 i 3 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f. Oblicz

$$\frac{f(6)}{f(12)}.$$

Zadanie 14. [matura, maj 2016, zadanie 12. (6 pkt)]
Dany jest trójmian kwadratowy $f(x) = x^2+2(m+1)x+6m+1$. Wyznacz wszystkie rzeczywiste wartości parametru m, dla których ten trójmian ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 tego samego znaku, spełniające warunek

$$|x_1 - x_2| < 3.$$

Zadanie 15. [matura, maj 2017, zadanie 12. (5 pkt)]
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$4x^2 - 6mx + (2m + 3)(m - 3) = 0$$

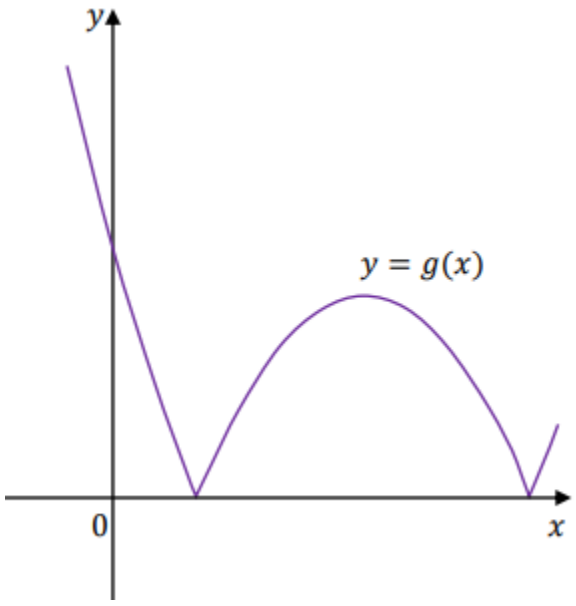
ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2, przy czym $x_1 < x_2$, spełniające warunek

$$(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0.$$

Zadanie 16. [test diagnostyczny CKE, grudzień 2022, zadanie 2. (4 pkt.)]
Funkcja g jest określona wzorem

$$g(x) = \left| -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5 \right|$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Fragment wykresu funkcji g w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) przedstawiono na rysunku (jednostki pominięto).



(a) Wyznacz zbiór wszystkich wartości, jakie funkcja g przyjmuje w przedziale $\langle 9, 11\rangle$. Zapisz obliczenia.

(b) Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru m, dla których równanie $g(x) = |m|$ ma dokładnie dwa rozwiązania dodatnie.

Legenda

- Zadania zapisane kolorem niebieskim oznaczają, że ich rozwiązania są dostępne w pliku pdf lub png.
- Zadania z czerwoną kropką obok oznaczają, że jest do nich dostępne nagranie video

Odpowiedzi zadania wstępne

- Zadanie 1: $a)b)c)d)e)$
- Zadanie 2: $a)b)c)$
- Zadanie 3: $a)b)c)d)e)f)g)$
- Zadanie 4: $a)b)c)$
- Zadanie 5: $a)b)c)$
- Zadanie 6:
- Zadanie 7:
- Zadanie 8:
- Zadanie 9:

Odpowiedzi zadania wstępne

- Zadanie 1: $m \in (-\infty, \sqrt{3}] \cup \left[\frac{3}{4}, \infty\right)$
- Zadanie 2: $m \in (-\infty, \sqrt{3}] \cup \left[\frac{3}{4}, \infty\right)$
- Zadanie 1: $m \in (-3, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3)$
- Zadanie 2: $m \in (0, 1) \cup (2, 3)$
- Zadanie 3: $m \in [-24, -10 - 4\sqrt{6}) \cup (-10 + 4\sqrt{6}, 4]$
- Zadanie 4: $m \in \{-\sqrt{14}, \sqrt{14}\}$

- Zadanie 5: $m \in [0, 3 - \sqrt{7}]$
- Zadanie 6: $m = \frac{12+\sqrt{109}}{5}$
- Zadanie 7: $m \in (0, 1) \cup (1, \frac{1+\sqrt{2}}{2})$
- Zadanie 8: $m \in (-\infty, -3) \cup (\frac{3}{5}, \frac{3}{4})$
- Zadanie 9: $m \in (-\frac{4}{7}, -\frac{1}{2}] \cup (-\frac{1}{2}, 0]$
- Zadanie 10: $m \in (-\infty, -1] \cup (0, 1) \cup (1, 4]$
- Zadanie 11:
$$\begin{cases} q = 3 \\ p = -1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} q = -1 \\ p = 3 \end{cases}$$
- Zadanie 12: $-1, 0, 1, 2$
- Zadanie 13: $\frac{7}{39}$
- Zadanie 14: $m \in (-\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$
- Zadanie 15: $m \in (-6\frac{1}{2}, -6) \cup (-6, -5\frac{1}{2})$
- Zadanie 16: $m \in (-5, -4) \cup \{0\} \cup (4, 5)$